Febrero 2025
Vol. 12, No. 1

revie

Revista de Investigación y Evaluación Educativa

e-ISSN: 2409-1553
https://revie.gob.do

ideice
Instituto Dominicano de Evaluación e Investigación de la Calidad Educativa

revie
Revista de Investigación y Evaluación Educativa

Febrero 2025 | volumen 12, número 01 | e-ISSN: 2409-1553 | https://revie.gob.do

DESCRIPCIÓN

La **Revista de Investigación y Evaluación Educativa (Revie)** es una publicación semestral del **Instituto Dominicano de Evaluación e Investigación de la Calidad Educativa (Ideice)**, dedicada a la difusión de investigaciones nacionales e internacionales en el ámbito educativo. Su objetivo es fomentar el análisis crítico, la innovación y la mejora continua en la educación mediante la publicación de estudios rigurosos. Revie mantiene una **política de acceso abierto** y recibe artículos que cumplan con estándares científicos, los cuales son sometidos a rigurosos procesos de arbitraje editorial. Se publica en febrero y agosto, promoviendo un espacio para el diálogo académico y la generación de conocimiento que impacte en la calidad educativa.

ideice
Instituto Dominicano de Evaluación e
Investigación de la Calidad Educativa

ÍNDICE

revie
Revista de Investigación y Evaluación Educativa

SOBRE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN DEL ÁLGEBRA LINEAL NECESARIA PARA REDUCIR LA DIMENSIONALIDAD CON MACHINE LEARNING

ON A STUDY AND RESEARCH PATH OF LINEAR ALGEBRA NECESSARY TO REDUCE DIMENSIONALITY WITH MACHINE LEARNING

Mario Cavani
Universidad de Oriente, Venezuela

Recibido: 2024/10/31 **Aceptado para su publicación**: 2025/01/22 **Publicado**: 2025/02/03

RESUMEN

Se propone un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) que surge al considerar ciertos temas del Álgebra Lineal (AL) que usualmente no forman parte de este curso a un nivel universitario. La experiencia se lleva a cabo al considerar el problema de la reducción de la dimensión en problemas con grandes cantidades de datos. En particular, se estudia el problema que surge cuando se quiere representar una imagen dada reduciendo la cantidad de datos de la imagen original, el cual se aborda considerando procedimientos de Machine Learning (ML). Bajo un análisis orientado por el paradigma del cuestionamiento del mundo, se describe un REI con elementos del esquema herbartiano y algunas dialécticas que permiten presentar una descripción de este complejo problema didáctico en el que interactúan AL, ML y programación. Este enfoque tiene la relevancia de aportar al proceso didáctico novedosos recursos retóricos, simbólicos y conceptuales que, aparte de ser herramientas de descripción y análisis, podrían servir como instrumentos epistémicos en procedimientos de indagación.

PALABRAS CLAVES

Álgebra Lineal, dialécticas, estudio e investigación, esquema herbartiano, Machine Learning.

ABSTRACT

A Study and Research Path (SRP) is presented while considering certain topics of Linear Algebra (LA) that are usually not part of this course at a university level. The experience is carried out by considering the problem of dimension reduction in problems with large amounts of data. In particular, the problem that arises when one wants to represent a given image by reducing the amount of data in the original image is studied, which is addressed by considering Machine Learning (ML) procedures. Under an analysis guided by the paradigm of questioning the world, an SRP is described with elements of the Herbartian scheme and some dialectics that describe this complex didactic problem in which LA, ML, and programming intervene. This approach is relevant in providing the didactic process with novel rhetorical, symbolic, and conceptual resources that, apart from being tools of description and analysis, could serve as epistemic instruments in inquiry procedures.

KEYWORDS

Linear Algebra, dialectics, study and research, herbartian scheme, Machine Learning.

e-ISSN: 2409-1553

1. INTRODUCCIÓN

En años recientes, la investigación en la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) se ha enfocado al estudio de las condiciones y restricciones que impiden la transición desde el *paradigma monumentalista* de las visitas a las obras hacia el *paradigma de cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2013). Un papel importante ha jugado en la enseñanza universitaria el dispositivo didáctico de los *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI), introducido por Chevallard (Chevallard & Bosch, 2020), el cual ha sido utilizado para analizar, entre otros, el problema didáctico que proviene de la modelización *matemática*. A modo de ejemplo, pueden verse (entre otros) los siguientes trabajos (Álvarez-Macea & Costa, 2019; Farrás et al., 2022; Bosch, 2018; Cavani, 2021, 2022; Florensa et al., 2020; García, Barquero, Florensa & Bosch, 2019; Gazzola et al., 2021; Ignacio, 2018; Markulin et al., 2021; Otero et al., 2020; Parra & Otero, 2017; Romo et al., 2019; Santos Junior, Dias & Bosch, 2017; Nicasso & Bosch, 2021; Vásquez et al., 2022).

Actualmente con las nuevas tecnologías han aparecido nuevas técnicas para resolver problemas en los cuales se maneja una gran cantidad de datos, lo ha sido referido como *big data*. En estos procedimientos se inscribe el ML, de hecho, tal es la importancia que estas técnicas han adquirido que se ha comenzado a incorporar su estudio en la escuela secundaria (Martins & Gresse Von Wangenheim, 2023).

Una situación como la actual, en relación con la *digitalización de la enseñanza de la matemática* no se veía desde los años sesenta cuando se introdujo sin una planificación y sistematización adecuada *la enseñanza de la matemática moderna*, experiencia que alerta sobre la actual implementación de los acelerados avances de la tecnología. Cuando desde ya, se están compartiendo experiencias sobre la *educación matemática en la edad digital* (ver (Weigand, 2022; Domínguez, 2024; Olsher, 2023)), en las investigaciones en educación matemática se promueve un sentimiento de satisfacción al asegurar que lo más importante y desafiante es desarrollar y aplicar nuevos métodos para avanzar en el aprendizaje de matemáticas por medio de ML, métodos que la educación matemática actual está preparando a la próxima generación de investigadores para aprender, desarrollar y aplicar con éxito. Al respecto, la actualización de los docentes y en general de las instituciones educativas no se debe soslayar. La TAD predice que los cambios que experimentan las instituciones necesariamente producirán cambios epistemológicos en la enseñanza del conocimiento.

En tal sentido, en este artículo se analizan ciertos cambios epistemológicos que se generan con la incorporación, de manera creciente la rama de la Inteligencia Artificial (IA), y de temas de ML en la enseñanza universitaria que van implícitos en la modelización matemática que emergen para resolver problemas de muy diversa índole en campos de las ciencias, las ingenierías, economía y finanzas, y aún en ciencias sociales y humanidades.

Este trabajo se enfoca particularmente a exhibir ciertas transposiciones didácticas y praxeologías que inevitablemente influyen en cambios en la dimensión epistemológica de lo didáctico que va a experimentar la enseñanza del AL como disciplina que de manera fundamental sirve de soporte para el abordaje de muchos temas en ML. El caso que se analiza en este trabajo tiene que ver con las praxeologías que ocurren cuando se aplica ML para *reducir la dimensión de los datos* de una imagen dada.

En este sentido, puede resolverse este problema ingresando la imagen a un software diseñado para los efectos buscados, pero esto constituye una actividad *no ostensiva*, es decir, que no materializa las técnicas por medio de las cuales se resuelve el problema, tal como sería en el caso de una actividad *ostensiva*, tal como se analizará aquí. Específicamente, se tomará en cuenta el papel del AL, y se verá, por ejemplo, que no son suficientes conocer los temas relacionados con *autovalores y autovectores* de una matriz que ha de ser cuadrada, sino que, en muchos casos, se requiere conocer otros conceptos y propiedades de las matrices en general, no necesariamente cuadradas.

Se verá que el tema de *los valores singulares* asociados a una matriz rectangular constituye un cuerpo de saberes que, por lo general, no forman parte de un primer curso tradicional de AL de la institucionalidad universitaria (Álvarez-Macea & Costa, 2019; Cavani, 2020), pero que aporta un procedimiento que permite factorizar la matriz rectangular en cuestión con una forma muy adecuada para la metodología de comprimir datos. En virtud de lo cual, al considerar la utilización de ML en la modelización matemática o como herramienta de solución de problemas, lo que obligatoriamente implica la incorporación y adopción de nuevas transposiciones didácticas en los saberes a enseñar en la disciplina del AL. En (Domínguez, 2024) puede apreciarse la importancia que tienen las matemáticas en el ML y en (Bai, 2022; Martén, 2023) se puede apreciar los nuevos problemas epistemológicos que surgen en esta nueva realidad.

En esta propuesta de REI se utiliza el *esquema herbartiano* como instrumento de análisis bajo la orientación propuesta en Nicasso y Bosch (2021).

2. METODOLOGÍA

Para estudiar el problema tratado en este trabajo, se aborda desde la TAD bajo el paradigma del cuestionamiento del mundo. En tal sentido, tal como se propone en este paradigma, se realizarán recorridos de estudio e investigación y se utilizará el *esquema herbartiano* conjuntamente con *dialécticas* apropiadas para el apoyo en esta metodología. Para esto, Chevallard (2013) postula como principios básicos que la educación debe buscar la formación de ciudadanos herbartianos, procognitivos y exotéricos. Herbartianos (en honor a Johan Heinrich Herbart, creador de la Pedagogía) en el sentido de dotarlos de una "actitud receptiva hacia el planteamiento de preguntas sin respuestas y problemas sin resolver" como motor que mueva a aprender. Procognitivos en el sentido de propender al conocimiento que está por descubrirse y no a la revisión del conocimiento ya descubierto. Exotéricos en oposición a esotéricos, esto último entendido como los conocedores por completo de los conocimientos disponibles sobre una disciplina. Así, los exotéricos se entienden como quienes están inmersos en un proceso de estudio donde siempre hay lugar para nuevos conocimientos sobre una disciplina.

De modo general, lo que se estila para proponer un REI, el estudio ha de iniciarse con una cuestión Q que un grupo de estudiantes X tendrá que responder con la colaboración de un grupo de profesores Y, conformándose así el *sistema didáctico* $S(X, Y, Q)$. El REI está determinado por el conjunto de procesos y procedimientos que cumplen X e Y para obtener una respuesta $R^{\heartsuit}$. Por medio del esquema herbartiano se describen parte de los tratamientos que se cumplen durante el proceso, lo cual se representa de la siguiente manera:

$$[S(X, Y, Q_o) \rightarrow \{Q_i, R_j^{\diamond}, O_k, D_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}.$$

En la anterior representación, Q_o es la cuestión inicial que genera el REI, Q_i son cuestiones que se plantean a partir de Q_o en el proceso de búsqueda de $R^{\heartsuit}$, las D_m son datos empíricos que pueden ser útiles en el proceso, las $R_j^{\diamond}$ representan obras o respuestas validadas con anterioridad en otras instituciones a las cuales accedieron miembros de X o de Y, y las O_k representan a un conjunto de otros objetos que intervienen en los procedimientos del proceso de estudio e investigación conjuntamente con Q_i, $R_j^{\diamond}$ y D_m y todo conforma el *medio* $M= \{Q_i, R_j^{\diamond}, O_k, D_m\}$ del dispositivo didáctico, de esta manera el sistema didáctico S construye y organiza ($\rightarrow$) el medio M con el cual se generará o producirá ($\hookrightarrow$) una respuesta $R^{\heartsuit}$.

El medio M continúa en desarrollo considerando *dialécticas* en el sentido que sugieren, clasifican y utilizan Nicasso & Bosch (2021) (también se puede ver (Bosch, Chevallard, García & Monaghan, 2020; Parra & Otero (2017, 2018)), donde se especifica que una dialéctica es una praxeología o un conjunto de praxeologías mediante las cuales se puede avanzar de manera productiva ante movimientos opuestos. Además, se hace la observación en Nicasso y Bosch (2021) que con el esquema herbartiano y las dialécticas se pueden describir sistemas didácticos centrados en el estudio de una praxeología u organización praxeológica $\mathscr{P}$. Esta visión se la puede interpretar de dos maneras: En primer lugar, considerar el sistema didáctico $S(X, Y, \mathscr{P})$, *como* un tipo particular del sistema didáctico $S(X, Y, Q_o)$ bajo cuestiones, entre otras, como ¿Qué es $\mathscr{P}$? ¿Cómo se usa $\mathscr{P}$? ¿Cuál es la razón de ser de $\mathscr{P}$? En segundo lugar, incorporar $\mathscr{P}$ a los conocimientos previos con una respuesta etiquetada $R^{\diamond}$ que se produce en el transcurso de un REI generada por una cuestión implícita Q_o, o bien que aparece al final del recorrido. Otros detalles del esquema herbartiano, así como otras herramientas que se utilizan para el análisis, entre otros pueden verse en (Bosch, 2018; Bosch & Winsløw, 2015; Gascón & Nicolás, 2020; Florensa, Bosch, Gascón & Winsløw, 2018; Parra & Otero, 2017, 2018). Para detalles sobre la TAD puede verse (Chevallard & Bosch, 2020; Cavani, 2021, 2022).

3. ANÁLISIS Y RESULTADOS SOBRE EL CONTEXTO DEL REI: ALGEBRA LINEAL NECESARIA EN MACHINE LEARNING PARA COMPRIMIR UNA IMAGEN $\mathscr{P}$

El REI que aquí se presenta surge del trabajo realizado con estudiantes de un curso universitario sobre Análisis Matricial, destinado a estudiantes tanto de grado como de postgrado, con la intención de utilizar estos saberes en modelizaciones de problemas tratados con procedimientos de ML. La complejidad del problema docente que desde lo didáctico se presenta aquí, se debe a que el tema tratado se mueve en tres disciplinas del conocimiento, a saber: programación, ML y AL, sin embargo, como se ha dicho, el énfasis se centrará en la modelización matemática que aporta el AL. El objetivo consiste en enfatizar y presentar praxeologías y transposiciones didácticas que mueven la dimensión epistemológica del papel que cumple el AL en la comprensión del problema de la reducción de la dimensión de los datos de una imagen dada, tanto en el tratamiento de los procedimientos y modelos necesarios como en su solución. También se busca analizar las condiciones y restricciones que surgen actualmente en las instituciones universitarias como producto del cambio que en lo institucional representa la incorporación del estudio de ML como método para predecir patrones de comportamiento en situaciones que pueden aparecer en diversas áreas del conocimiento.

3.1. MACHINE LEARNING Y ALGUNAS CONSIDERACIONES EPISTEMOLÓGICAS

Dicho una manera general, ML es un área de la IA que desarrolla sistemas que pueden aprender de situaciones previas y mejorar los resultados sin una programación explícita para esto. No obstante, se requiere de una programación inicial para la solución del problema que se está tratando, la cual se sustenta en la mayoría de los casos en algún modelo matemático. Por tal motivo, se vislumbra la existencia de un estrecho vínculo entre la matemática necesaria y ML para comprender el funcionamiento de los algoritmos que se utilicen en un problema dado. Las matemáticas para el aprendizaje automático no son solamente una herramienta, sino el lenguaje fundamental que permite a los algoritmos aprender, adaptarse y tomar decisiones.

Por medio de las matemáticas se generan la estructura y los métodos requerido para modelar procedimientos que identifiquen patrones, que permita producir predicciones, así como tomar decisiones basadas en los datos. Dentro de la matemática que se utiliza con mayor frecuencia en ML destacan: el AL por su papel esencial como herramienta matemática ideal para el procesamiento de datos. Esto se debe fundamentalmente a que actualmente los programas de computación utilizan vectores y matrices en la estructura de los algoritmos, lo que claramente permite la modelización con AL. Con esto, se permite también a los ordenadores y sistemas, por ejemplo, extraer información significativa de imágenes digitales y datos visuales para realizar recomendaciones de acuerdo con la información recabada. Por otra parte, también se destacan en ML, las estadísticas y la probabilidad, se utilizan de manera crucial en el análisis predictivo, el control de calidad y la toma de decisiones bajo incertidumbre.

Muchas aplicaciones utilizan modelos estadísticos y bayesianos. Los algoritmos de ML se clasifican en varias categorías dependiendo del tipo de aprendizaje que utilicen (Goodfellow et al., 2016). *Aprendizaje supervisado*, en el cual el algoritmo crea un modelo matemático a partir de un conjunto de datos que contiene tanto las entradas como los resultados deseados. Por ejemplo, los algoritmos de clasificación y de regresión son del tipo de aprendizaje supervisado.

El *aprendizaje semisupervisado*, se utiliza una combinación de datos etiquetados y no etiquetados que permiten hacer mejores predicciones con nuevos puntos de datos. En el *aprendizaje no supervisado*, el algoritmo crea un modelo matemático a partir de un conjunto de datos que contienen únicamente entradas y ninguna etiqueta de salida deseada. Estos algoritmos se usan para encontrar patrones en los datos. También están los *algoritmos de aprendizaje por refuerzo* que reciben retroalimentación como un refuerzo positivo o negativo en un entorno dinámico. Se usan, por ejemplo, en vehículos autónomos. Humphreys (2009) propone que las simulaciones por ordenador y la ciencia computacional constituyen un conjunto claramente nuevo de métodos científicos que introducen nuevas cuestiones tanto de tipo epistemológico como metodológico en la filosofía de la ciencia y alega que estos métodos alejan a los humanos del centro de la empresa epistemológica tradicional que, con algunas excepciones, ha sido el estudio del conocimiento humano, que a su vez se relaciona con la dimensión epistemológica dentro de la TAD (Lucas et al., 2019).

En este sentido, propone también que, las características esenciales de la ciencia computacional, es la *opacidad epistémica esencial* del proceso computacional que va del modelo abstracto que subyace a la simulación al resultado. Humphreys (2009) define que un proceso es *epistémicamente opaco* en relación con un agente cognitivo Y en el momento t en el caso que Y no conozca en t todos los elementos epistémicamente relevantes del proceso. Un proceso es *esencialmente epistémicamente opaco* para *Y* si y solo si es imposible, dada la naturaleza de *Y*, que *Y* conozca todos los elementos epistémicamente relevantes del proceso. También incorpora la siguiente terminología: llama *escenario híbrido* a la situación en la que los humanos se enfrentan a una ciencia que se lleva a cabo al menos en parte por máquinas, y *escenario automatizado* a la situación más extrema de una ciencia completamente automatizada. Esta distinción es importante porque en el escenario híbrido, no se puede abstraer por completo de las capacidades cognitivas humanas cuando se trata de cuestiones de representación y computación.

En un número cada vez mayor de campos de la ciencia, una epistemología exclusivamente antropocéntrica ya no es apropiada porque ahora existen autoridades epistémicas no humanas, lo que plantes un problema que se puede referir como *el predicamento antropocéntrico*, de cómo los humanos, pueden entender y evaluar métodos científicos basados en la computación que trascienden las propias habilidades. Este dilema es diferente del antiguo problema filosófico de entender el mundo desde una perspectiva humana porque el antiguo problema implica intermediarios de representación que están hechos a la medida de las capacidades cognitivas humanas.

Con la situación híbrida, los dispositivos de representación, que incluyen simulaciones, se construyen para equilibrar las necesidades de las herramientas computacionales con los consumidores humanos. Esto constituye un cambio epistemológico importante que tiene consecuencias significativas de naturaleza claramente filosófica para la forma en que se conciben las teorías, los modelos y otros elementos de representación de la ciencia. Por su parte, Bai (2022) plantea: Una vez que el aprendizaje automático se ha incorporado al proceso cognitivo humano, las nuevas características de la cognición de las máquinas entran en la perspectiva de la investigación epistemológica, y existe la necesidad de una nueva epistemología que pueda dar cabida a mecanismos cognitivos similares y diferentes de los humanos y las máquinas en el proceso de procesamiento de la información.

La capacidad de las máquinas para reconocer ha llevado a la creación de la *"epistemología de las máquinas"*. Además, aunque existen problemas de transparencia e interpretabilidad en el aprendizaje automático, se debe reconocer la existencia de cierto conocimiento de las máquinas (Martén, 2023). En otras palabras, la justificación del conocimiento de las máquinas no necesita incluir la transparencia y la interpretabilidad. Cuando las máquinas hayan desarrollado ciertas funciones cognitivas que sean superiores a las de los humanos, se tendrá que ver cómo hacerlas compatibles con el proceso cognitivo humano, de modo que la epistemología de las máquinas y la cognición humana puedan formar una interfaz orgánica, creando un nuevo sistema de cognición hombre-máquina en armonía, desempeñará un papel crucial en el desarrollo futuro de la IA. La *epistemología de la integración hombre-máquina* es un nuevo tema epistemológico en la era de la inteligencia y el big data. No obstante, Mazzocchi (2020) señala que:

"En cualquier caso, la creciente opacidad de los algoritmos es algo sobre lo que debemos meditar con prudencia. Hoy en día, se celebra la performatividad de las herramientas de big data incluso con triunfalismo. La potencia epistémica y la supuesta neutralidad de los algoritmos, que pueden realizar funciones inalcanzables para la mente humana, se oponen a la fiabilidad de la interpretación y la toma de decisiones humanas. No obstante, no deberíamos usar la performatividad como razón para ceder la autoridad y el control a las máquinas."

3.2. LA CUESTIÓN DEL ESTUDIO

Como se ha mencionado antes el problema que se aborda en este trabajo tiene que ver con analizar desde la TAD y proporcionar la mayor información relevante desde lo didáctico sobre aquellos aspectos del AL que interviene en la modelización matemática para *reducir la dimensionalidad* y la compresión de los datos de una imagen dada. Este es un problema que se resuelve utilizando ML, el interesado en resolver un problema de este tipo puede recurrir al software adecuado y se resuelve. Lo que interesa aquí cuestionar estos procedimientos que no presentan la razón de ser de la matemática que interviene de manera decisiva en la solución. En particular, el enfoque que se adopta aquí tiene que ver con mostrar *la razón de ser de procedimientos* que no se estudian en curso ordinario de AL, pero que los cambios de paradigmas institucionales que llevan al uso de IA, y en particular de ML, requieren de ciertos reacomodos epistemológicos del AL en estos nuevos tiempos. Es importante observar que los autores en (Martins et al., 2023) señalan que los resultados de su revisión indican que en algunos cursos los estudiantes de secundaria pueden comprender y aplicar conceptos, algoritmos y procesos básicos de ML aplicando estrategias de aprendizaje predominantemente activas y prácticas, de manera tal que, la combinación con el aprendizaje basado en problemas y proyectos, indican que los estudiantes pudieron aprender conceptos de ML e incluso construir sus propios modelos de ML.

Para iniciar el estudio, se plantea la siguiente cuestión:

Q_0: ¿Cómo *reducir la dimensionalidad* y la compresión de datos proporcionados por una imagen $\mathscr{P}$ dada en forma matricial y como interviene el AL?

Para la búsqueda de la respuesta a esta pregunta generatriz se debe tener en cuenta *la dialéctica del estudio y la investigación* mediante la cual se combina el estudio de praxeologías disponibles en la cultura escolar, que se han denotado por $R_j^{\diamond}$, con la formulación de nuevas preguntas. Este proceso genera un cuestionamiento de las obras, nociones y demás saberes vinculados a la pregunta. Se provoca así un estudio e investigación que concretan esta dialéctica. En tal sentido, a los efectos de la cuestión generatriz planteada aquí, por la *dialéctica de estudio e investigación* se obtiene que en ML, los datos con una gran cantidad de características o variables se consideran como datos con dimensión alta. En tal caso, la complejidad del modelo aumenta con la cantidad de características y se vuelve más difícil de tratar computacionalmente en la búsqueda de una solución adecuada. Por otra parte, en general los datos con dimensión alta pueden provocar un sobreajuste, lo que hace que el modelo se ajuste demasiado a los *datos de entrenamiento* (datos de los cuales las máquinas aprenden) y no se consiguen nuevos datos que mejoren las predicciones.

La reducción de dimensionalidad consiste en tomar los datos dados en un espacio de dimensión alta y transformarlos hacia un espacio de dimensión menor. Con el uso de esta técnica se reduce una buena cantidad de características de los datos conservando la mayor cantidad posible de información importante, con el resultado que la representación a baja dimensión permite conservar propiedades significativas de los datos originales, lo que idealmente permite producir nuevos datos cercanos a su *dimensión intrínseca*, es decir, con una cantidad adecuada de variables necesarias para obtener un representación mínimamente buena comparada con la que dan los datos originales. Existen varios procedimientos que permiten reducir la dimensionalidad y se orientan básicamente en dos enfoques: la *selección de características* y la *extracción de características*.

La extracción de características crea nuevas características por medio de funciones que utilizan las características originales, mientras que la selección de características devuelve un subconjunto de las características. Las técnicas de selección de características se utilizan a menudo en dominios en los que hay muchas características y comparativamente pocas muestras (o puntos de datos). De acuerdo con todo lo antes mencionado, surge la siguiente cuestión:

Q_1: ¿Cuál es el procedimiento más adecuado para reducir la dimensionalidad de una imagen $\mathscr{P}$ dada en forma matricial y cuales procedimientos de AL están presentes?

Queda claro que para dar una respuesta a Q_1 se procede utilizando métodos computarizados que permitan el uso de ML. En esta parte computarizada, se observa una diferencia sustancial con lo didáctico en matemáticas, y tiene que ver con que no se aprecia el paradigma monumentalista tan claramente como en los temas clásicos de matemáticas. Por tal motivo, y visto los planteamientos epistemológicos relacionados con ML comentados en la subsección 3.1, es por lo que se considera aquí una dialéctica de las *cajas negras y cajas claras*, por medio de la cual se busca estimular el estudio de los saberes necesarios y pertinentes para clarificar la solución del problema.

La dialéctica se activa para gestionar el nivel de ignorancia o comprensión de una determinada respuesta $R_j^\diamond$ (Parra & Otero, 2017). Existen varios lenguajes de computación que permiten utilizar algoritmos de ML, de acuerdo con la dialéctica mencionada, se escoge el programa *Python* en virtud de ser uno de los más utilizados en la actualidad. Los datos del problema que se analiza aquí vienen dados en una imagen, para lo cual se recomienda utilizar la biblioteca *NumPy* (Aggarwal, 2020). Continuando con el uso de la dialéctica *media (sistemas de información)-medio (de estudio)* se consulta con la IA *Google Gemini* que suministra la información sobre el procedimiento de *extracción de características* conocido como *descomposición en valores singulares*, conocida comúnmente como *SVD* que básicamente utiliza procedimientos sustentados matemáticamente con AL. De esta manera se logra concretar en el medio de la cuestión Q_1 los siguientes elementos:

$R_{11}^\diamond$: Usar *Python*

Se elige este programa debido a su alta difusión entre profesores y estudiantes que buscan aplicar ML. El programa codificado es el siguiente:

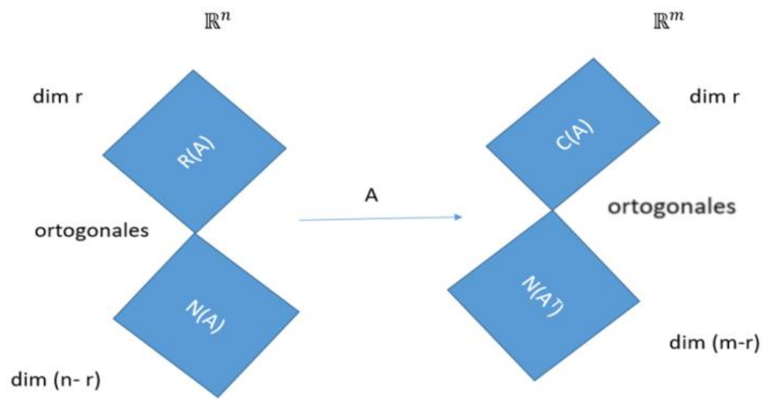
```
import cv2
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from PIL import Image

def compress_image(image_path, k):
  """
  Comprime una imagen utilizando SVD.

  Args:
    image_path: Ruta a la imagen.
    k: Número de valores singulares a conservar.

  Returns:
    Una matriz numpy representando la imagen comprimida.
  """

  # Cargar la imagen en escala de grises
  img = Image.open(image_path).convert('L')
  # Convertir la imagen a una matriz numpy
  img_array = np.array(img)

  # Calcular la SVD
  U, s, Vt = np.linalg.svd(img_array)
```

```
  # Reconstruir la imagen utilizando solo los k primeros valores singulares
  s_k = np.diag(s[:k])
  img_compressed = np.dot(U[:, :k], np.dot(s_k, Vt[:k, :]))

  return img_compressed

# Ruta a la imagen original
image_path = "tu_imagen.jpg"

# Lista de valores de k a probar
valores_k = [5, 10, 20, 50]
  # Mostrar la imagen original y la comprimida
#imagen = Image.open(image_path)
img1 = cv2.imread('tu_imagen.jpg', cv2.IMREAD_GRAYSCALE)
plt.imshow(img1, cmap='gray')
plt.title('Imagen original')
# Crear una figura con múltiples subplots
fig, axes = plt.subplots(nrows=1, ncols=len(valores_k), figsize=(20, 4))

# Iterar sobre los valores de k y generar las imágenes comprimidas
for i, k in enumerate(valores_k):
  compressed_img = compress_image(image_path, k)
  axes[i].imshow(compressed_img, cmap='gray')
  axes[i].set_title(f'k = {k}')
  axes[i].axis('off')
plt.show()
```

R_{12}◇: Se utiliza la biblioteca *NumPy*

De acuerdo con Brownlee (2018), NumPy es una biblioteca del ámbito de Python que se puede utilizar para aplicaciones científicas y numéricas y es la herramienta adecuada para utilizar y realizar operaciones de álgebra lineal. La principal estructura de datos en NumPy es *ndarray*, abreviatura utilizada para designar una matriz N-dimensional. Cuando se trabaja con NumPy, los datos en un ndarray es una matriz de tamaño fijo en la memoria que contiene datos del mismo tipo, como números enteros o valores de punto flotante. Se debe crear una matriz a partir de datos o estructuras de datos de Python simples como una lista usando la función array en Python, se crea un ndarray a partir de los datos lista y así se accede a la forma y al tipo de datos de las matrices.

FIGURA 1.
LOS 4 SUBESPACIOS ASOCIADOS A UNA MATRIZ A



$R_{13}^{\diamond}$: Se utiliza la técnica *SVD*

Por sus siglas en inglés *SVD* (*singular value decomposition*) o *descomposición en valores singulares* es una herramienta matemática poderosa que se utiliza en la ciencia de datos y en ML. Desde el *saber sabio*, estos conocimientos están asociados a los nombres de los matemáticos Eugenio Beltrami, Camille Jordan, James Joseph Sylvester, Erhard Schmidt y Hermann Weyl, quienes hicieron sus aportes a finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX. Actualmente, la técnica de la *SVD* se utiliza por lo general en la reducción de la dimensionalidad, la extracción de información y la reducción de ruido. En el caso de la compresión de imágenes el uso de este algoritmo se logra mediante la selección adecuada de *k* elementos. En la medida que este número se incrementa, la matriz con la cual se trabaja logra reconstruir una imagen casi como la original. Como se verá es un algoritmo simple, pero de una complejidad computacional elevada.

O_1: El procedimiento *SVD* tiene su fundamento en AL y requiere del cálculo de los valores singulares de una matriz.

El tema de los valores singulares de una matriz no forma parte, por lo general de un primer curso de AL a nivel universitario, tal como se presenta en (Cavani, 2020). En tal sentido, supóngase que se tiene una matriz A, $m \times n$, $(A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$

Se sabe del AL que ocurre la descomposición en suma directa $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus N(A)$ y $\mathbb{R}^m = C(A) \oplus N(A^\top)$, donde *R(A)* denota al subespacio rango de A, *C(A)* el subespacio generado por las columnas de *A,*

$N(A)$ y $N(A^\top)$ representan al núcleo de la matriz A y de su transpuesta $A^\top$, respectivamente (ver Figura 1). La *SVD* consiste en un procedimiento que factoriza a la matriz A *en la forma* $A = U\Sigma V^\top$. Lo cual se explica a continuación. *El* planteamiento es el siguiente: ¿Será posible encontrar bases ortonormales para $\mathbb{R}^n$, póngase $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_n}$, y para $\mathbb{R}^m$, dígase $\underline{u_1}, \underline{u_2}, \dots, \underline{u_n}$, de tal modo que los $\underline{v_i}$ sean de alguna manera transformados en los $\underline{u_i}$?

Se quiere que $A\underline{v_i} = \sigma_i \underline{u_i}$, para ciertos escalares σ_i. Como m no es necesariamente igual a n, se deduce que algunos a muchos de los $\underline{v_i}$ en $\mathbb{R}^n$ serán transformados en $\underline{0}$ en $\mathbb{R}^m$. Pero se conoce del AL que $\dim(R(A)) = \dim(C(A))$, de modo que con aquellos vectores que van al $\underline{0}$ en $\mathbb{R}^m$ se podría seleccionar una base ortonormal para $N(A)$. De modo que, para cualquier matriz A $m \times n$ de rango r, lo que se debe es encontrar vectores ortonormales $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_n} \in \mathbb{R}^n$ y vectores ortonormales no nulos $\underline{u_1}, \underline{u_2}, \dots, \underline{u_r} \in \mathbb{R}^m$, y escalares positivos $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ tal que

$$A\underline{v_1} = \sigma_1\underline{u_1}, A\underline{v_2} = \sigma_2\underline{u_2}, \dots, A\underline{v_r} = \sigma_r\underline{u_r}, \qquad (1)$$
$$A\underline{v_{r+1}} = \underline{0}, \dots . A\underline{v_n} = \underline{0}. \quad (2)$$

Reescribiendo este último sistema de ecuaciones (1) y (2) de manera matricial (tal como se hace en https://es.wikipedia.org/wiki/Descomposici%C3%B3n_en_valores_singulares) con las matrices ortogonales

$$V = \begin{pmatrix} | & & | \\ \underline{v_1} & \cdots & \underline{v_n} \\ | & & | \end{pmatrix} n \times n, \text{y } U = \begin{pmatrix} | & & | \\ \underline{u_1} & \cdots & \underline{u_m} \\ | & & | \end{pmatrix} m \times m, \text{ se tiene que}$$

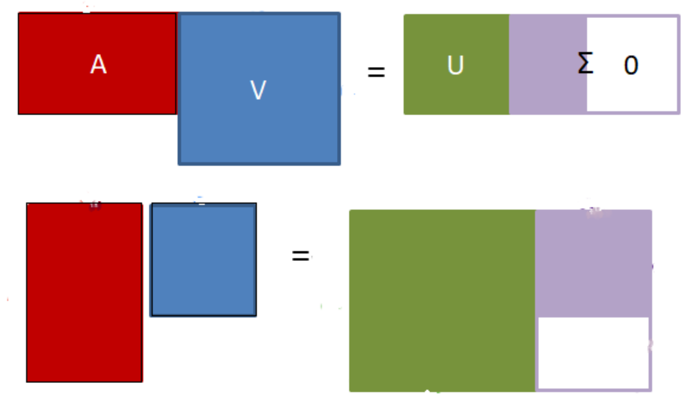
$$U\Sigma = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ \underline{u_1} & \cdots & \underline{u_m} \\ | & & | \end{pmatrix}}_{U\ m\times m\ es\ \text{ortogonal}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma \text{ es } m\times n} = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ \sigma_1\underline{u_1} & \cdots & \sigma_r\underline{u_r} & 0 & \cdots & 0 \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Se aprecia así que $AV = U\Sigma$, y como V es una matriz ortogonal ocurre que $V^\top = V^{-1}$. Por lo tanto, se tiene la factorización de A en la forma $A = U\Sigma V^\top$.
De acuerdo con esta descomposición se puede inferir que la matriz A se puede escribir como combinación lineal de matrices de rango 1, por lo que:

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^\top. \\ &= \sigma_1\underline{u_1}\,\underline{v_1}^\top + \sigma_2\underline{u_2}\,\underline{v_2}^\top + \cdots + \sigma_r\underline{u_r}\,\underline{v_r}^\top. \ (3) \end{aligned}$$

Un diagrama (ver Figura 2) que ilustra muy bien estos productos matriciales es el siguiente (en caso que $r = \min\{m, n\}$):

FIGURA 2.
ESQUEMA DE LA DESCOMPOSICIÓN SVD DE UNA MATRIZ A (ELABORADO POR EL AUTOR)



Los vectores ortonormales $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_n} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{u_1}, \underline{u_2}, \dots, \underline{u_r} \in \mathbb{R}^m$, y los escalares positivos $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$, se obtienen así: sean $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_r}$ los autovectores de $A^\top A$ correspondientes a los autovalores no nulos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Entonces $A^\top A\underline{v_i} = \lambda_i \underline{v_i}$ for $i = 1, \dots, r$. Sea $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, y sea $\underline{u_i} = \frac{1}{\sigma_i} A\underline{v_i}$, $i = 1, \dots, r$.

Se puede ver que:

- $\underline{u_i}$ son autovectores de $AA^\top$, de hecho

$$\begin{aligned} AA^\top \underline{u_i} &= (AA^\top)\left(\frac{1}{\sigma_i} A\underline{v_i}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_i} A\left(A^\top A\underline{v_i}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_i} A\left(\sigma_i^2 \underline{v_i}\right) \\ &= \sigma_i A\underline{v_i} \\ &= \sigma_i\left(\sigma_i \underline{u_i}\right) \\ &= \sigma_i^2 \underline{u_i} \qquad (4) \end{aligned}$$

- Dado que los $\underline{v_i}$ son ortonormales, también lo son los $\underline{u_i}$ tal como puede verse a continuación:

$$\begin{aligned}\underline{u_j}^\top \underline{u_i} &= \left(\frac{1}{\sigma_j} A v_j\right)^\top \left(\frac{1}{\sigma_i} A v_i\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \underline{v_j}^\top \underbrace{A^\top A \underline{v_i}}_{\sigma_i^2 \underline{v_i}} = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \underline{v_j}^\top \underline{v_i} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j; \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j. \end{cases}\end{aligned}$$

Finalmente, se requiere seleccionar a los restantes $n - r$ vectores $\underline{v_{r+1}}, \dots, \underline{v_n}$ y $m - r$ vectores $\underline{u_{r+1}}, \dots, \underline{u_m}$. Para esto basta con tomar $\underline{v_{r+1}}, \dots, \underline{v_n}$ como una base ortonormal para $N(A)$ y $\underline{u_{r+1}}, \dots, \underline{u_n}$ como una base ortonormal para $N(A^\top)$. Estos serán ortogonales a los primeros vectores $\underline{v}$ y $\underline{u}$ previamente seleccionados, debido a que $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_r} \in R(A)$ y $R(A) \perp N(A)$, también $\underline{u_1}, \dots, \underline{u_r} \in R(A^\top)$ y $R(A^\top) \perp N(A^\top)$.

En conclusión, la matriz A $m\times n$ se puede factorizar como

$$A = U\Sigma V^\top,$$

donde las matrices U, V son ortogonales. Se definen los valores singulares de la matriz A como los escalares $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$. Es de notar que los autovalores $\lambda_k$de la matriz $AA^\top$ siempre son reales y no negativos (ver (4)).

Una vez conocido el proceso de la descomposición *SVD* se debe dar atención a la siguiente cuestión, que en definitiva justifica la razón de ser de este procedimiento para reducir la dimensionalidad de una imagen:

Q₃: ¿Por qué la *SVD* proporciona la mejor opción para reducir la dimensionalidad de una imagen $\mathscr{P}$ dada en forma matricial?

$R_3^\diamond$: Dada la representación de la matriz A dada en (3), teniendo en cuenta la dialéctica de estudio e investigación y los procedimientos descritos en Deisenroth et al. (2020), una matriz que aproxima a la matriz A que contiene los datos originales es la matriz de rango k dada por

$$A_k = \sigma_1 \underline{u_1}\, \underline{v_1}^\top + \sigma_2 \underline{u_2}\, \underline{v_2}^\top + \cdots + \sigma_k \underline{u_k}\, \underline{v_k}^\top.$$

O_3: Como se observa equivale a cortar a partir del término k la representación que se obtiene de método *SVD* dado en la fórmula (3). Lo que queda por saber es si existe otra matriz B que sea una mejor aproximación para la matriz A. La respuesta a esta pregunta la da el siguiente teorema (ver (Deisenroth et al., 2020)):

Teorema (Eckart-Young): La matriz de rango k que mejor aproxima a la matriz A es la matriz A_k. Este teorema asegura que si hay otra matriz B de rango $\leq k$ que aproxima a la matriz A, entonces tendrá que cumplirse forzosamente que $\|A - B\| \geqslant \|A - A_k\|$.
Se recuerda que la norma de la matriz A, $\|A\|$ representa una medida del tamaño de la matriz A. Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$, la norma matricial inducida por $\|\cdot\|$ se define como

$$\|A\| := \max \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}.$$

Tomando en cuenta todo lo encontrado en el Recorrido de Estudio e Investigación se llega a la siguiente respuesta al problema planteado.

$R^{\heartsuit}$: Para reducir la dimensionalidad de una imagen $\mathscr{P}$ dada en forma matricial se puede utilizar un programa en Python que utilice el procedimiento *SVD,* el cual se fundamenta en procedimientos de AL que permiten representar la matriz por medio de la factorización descrita en la fórmula (3), mediante la cual se realiza la aproximación A_k de la imagen $\mathscr{P}$ que de acuerdo con el Teorema de Eckart-Young es la matriz de rango k que mejor aproxima a la matriz que representa a la imagen $\mathscr{P}$.

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se propone un dispositivo didáctico bajo la estructura de REI, metodología establecida en la TAD como procedimiento que puede utilizar de manera expedita el paradigma del cuestionamiento del mundo. Por medio de este procedimiento se busca reconocer y capturar la razón de ser del AL dentro del procedimiento de ML que reduce la dimensión de una matriz que contiene los datos de una imagen $\mathscr{P}$ dada hacia una matriz de rango menor, para hacer esto se propone un algoritmo programado en Python que toma la siguiente imagen de un perrito (ver Figura 3), para la cual se redimensiona la imagen utilizando la idea de $R_3^{\diamond}$ del procedimiento *SVD* descrito en O_2 tomando en consideración los casos con 5, 10, 20 y 50 valores singulares respectivamente. Es decir, se aproxima a la matriz de la imagen original $\mathscr{P}$ con matrices de rango 5, rango 10, rango 20 y rango 50, de lo que se puede observar (ver Figura 4) que los casos de rango 20 y rango 50 reproducen bastante bien la imagen original (ver Figura 3) a una menor dimensión de los datos.

FIGURA 3.

IMAGEN ORIGINAL

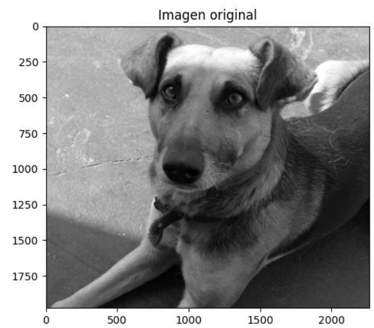


FIGURA 4.

IMÁGENES DE DIMENSIÓN MÁS BAJA

En este estudio se comprueba de manera fehaciente la importancia del AL para aplicar el procedimiento *SVD*. El aprendizaje de saberes relacionados con los espacios dados por el rango y el núcleo de una matriz son fundamentales y los 4 subespacios asociados a una matriz (ver Figura 1) resultan de gran importancia para desarrollar de manera clara el tema de los valores singulares asociados a una matriz dada $m\times n$, que produce la representación (3).

Como todo problema tratado desde la TAD, se puede continuar cuestionando lo aquí realizado y continuar enriqueciendo el problema. Por otra parte, se puede apreciar que este problema, desde el punto de vista de las dimensiones que define la TAD, amerita seguir desarrollando cada uno de los aspectos epistemológico, ecológico y económico, los cuales han solamente sido tocados muy someramente, en particular la dimensión epistemológica, se predice va a heredar características propias, tales como las descritas aquí en la subsección 3.1 relacionadas con la epistemología del ML lo que requiere de atención para avanzar en la comprensión de la dimensión epistemológica de la TAD.

REFERENCIAS

Aggarwal, C. C., Aggarwal, L. F., & Lagerstrom-Fife. (2020). *Linear algebra and optimization for machine learning* (Vol. 156). Cham: Springer International Publishing.

Álvarez-Macea, F., & Costa, V. A. (2019). Enseñanza del Algebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Eco Matemático*, 10(2), 65-78.

Bai, H., (2022). The Epistemology of Machine Learning. *FILOSOFIJA. SOCIOLOGIJA*, 33(1), 40–48

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. In B. Sirakov, P. N. De Souza &M. Viana (Eds.*), International Congress of Mathematicians*, 3, 4001-4022. Rio de Janeiro: World Scientific Publishing Co.

Bosch, M., Chevallard, Y., García, F. J., & Monaghan, J. (2020). *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook*. London: Routledge. http://doi.org/10.4324/9780429198168-6

Bosch, M., & Winsløw, C. (2015). Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 35(2), 357-399.

Cavani, M. (2020). Proceso didáctico del Álgebra Lineal en las tres dimensiones, *Libro de Actas del Primer Congreso Caribeño de Investigación Educativa*, 833-841. https://goo.su/VHQiP55

Cavani, M. (2021). Una propuesta para los procesos didácticos en la especialidad de matemática del nuevo currículo en la República Dominicana en las tres dimensiones, *Revista de Investigación y Evaluación Educativa-Revie, 8*(2) 68-84. https://doi.org/10.47554/revie2021.8.24

Cavani, M. (2022). Un modelo epistemológico de referencia en torno al problema didáctico del nuevo currículo para la formación de profesores de matemáticas en la República Dominicana. *Revista De Investigación Y Evaluación Educativa*, *9*(2), 7–28. https://doi.org/10.47554.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020). Anthropological theory of the didactic (ATD). *Encyclopedia of mathematics education*, 53-61.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182.

Deisenroth, M. P., Faisal, A. A., & Ong, C. S. (2020). *Mathematics for machine learning*. Cambridge University Press.

Domínguez, S. (2024). Importancia de las matemáticas en el Machine Learning, Openwebinars, https://openwebinars.net/blog/matematicas-machine-learning/

Farrás, B. B., Bosch, M., & Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *Avances de investigación en educación matemática*, (21), 87-106.

Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2020). Question-answer maps as an epistemological tool in teacher education*, Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09454-4

Florensa, I., Bosch, M., Gascón, J., & Winsløw, C. (2018). Study and research paths: A new tool for design and management of project-based learning in Engineering. *International Journal of Engineering Education*, 34(6), 1848-1862.

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I., & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de investigación en educación matemática*, 15, 75-94. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15

Gascón Pérez, J., & Nicolás, P. (2020). Paradigmas didácticos y reforma curricular: el caso de la teoría antropológica de lo didáctico. *Educação Matemática Pesquisa*, *22*(4).

Gazzola, M. P., Otero, M. R., & Llanos, V. C. (2021). Recorrido de estudio e investigación en física y matemáticas en la escuela secundaria. *Praxis & Saber*, *12*(31), 125-144.

Goodfellow, I., Heaton, J., Bengio, Y. & Courville, A. (2016). *Genetic programming and evolvable machines*, Deep learning: The MIT Press, *19*(1), 305-307.

Humphreys, P. (2009). The philosophical novelty of computer simulation methods. *Synthese*, *169*, 615-626.

Lucas, C., Fonseca, C., Gascón, J., & Schneider, M. (2019). The phenomenotechnical potential of reference epistemological models. The case of elementary differential calculus, In M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García & J. Monaghan (Eds.) Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A comprehensive Casebook, p. 77-97. London: *Routledge*.

Markulin, K., Bosch, M., & Florensa, I. (2021). Un recorrido de estudio e investigación para la enseñanza universitaria de la estadística. *Investigación en Educación Matemática XXIV*, 417-424.

Martén, S. (2023). *El problema epistemológico de los big data en la producción de conocimiento científico*. Tesis de Maestría en Filosofía. Sistema de Estudios de Postgrado. Universidad de Costa Rica. https://goo.su/eTVRP

Martins, R. M., & Gresse Von Wangenheim, C. (2023). Findings on Teaching Machine Learning in High School: A Ten-Year Systematic Literature Review*, Informatics in Education*. 22(3), 421-440.

Mazzocchi, F. (2020). Sobre el "Big Data" ¿Cómo podríamos dar sentido a los macrodatos? *Mètode Science Study Journal*. Universitat de València. DOI: 10.7203/metode.11.15258

Olsher, S. (2023). Mathematics education in the digital age-learning, practice and theory: by Alison Clark-Wilson, Ana Donevska-Todorova, Eleonora Faggiano, Jana Traglova, and Hans-Georg Weigand. https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1994455

Otero, M. R., Llanos, V.C., & Parra, V. (2020). Training in-service teachers: study of questions and the organization of teaching. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4).

Parra, V., & Otero, M. R. (2017). Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didácticos-matemáticos de las "dialécticas". *Educación matemática*, 29(3), 9-49. https://doi.org/10.24844/em2903.01

Parra, V., & Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 13(2), 01-19.

Romo, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-pluriversidad*, *19*(2), 161-183.

Santos Júnior, V. B., Dias, M. A., & Bosch, M. (2019). Um Percurso de Estudo e Pesquisa para o Estudo das Noções de Juros Simples e Compostos. *Bolema*, 33(63), 327-347.

Vásquez, S., Barquero, B., & Bosch, M. (2021). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. In *Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (105-115). Springer International Publishing.

Weigand, H. (2022). MEDA3 Mathematics Education in Digital Age 3: Ana Donevska-Todorova, Eleonora Faggiano, Paola Iannone, Janka Medová, Hans-Georg Weigand et al. *Proceedings of the 13th ERME Topic Conference (ETC13),* Nitra, Slovakia.

CÓMO CITAR:

Cavani, M. (2025). Sobre un Recorrido de Estudio e Investigación del Álgebra Lineal necesaria para reducir la dimensionalidad con Machine Learning. *Revista de Investigación y Evaluación Educativa*, *12*(1), 27-47. https://doi.org/10.47554/revie.vol12.num1.2025.pp27-47